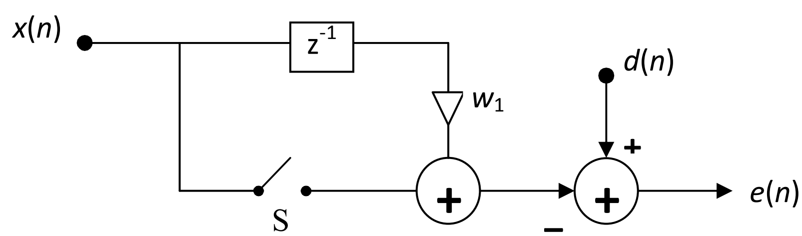
Setul 1.

1. Scrieți matricea de autocorelație a unui zgomot alb, cu puterea medie σ^2. Calculați norma spectrală și numărul condițional.
2. Scrieți matricea de autocorelație pentru o sinusoidă complexă, $x(n) = Ae^{jn\omega}, \quad A = |A|e^{j\varphi}$, unde φ este o variabilă aleatoare.
3. Scrieți matricea de autocorelație pentru o sinusoidă complexă, $x(n) = A_1 e^{jn\omega_1} + A_2 e^{jn\omega_2}, \quad A_i = |A_i|e^{j\varphi_i}$, unde φ_i sunt variabile aleatoare independente uniform distribuite între –π și π. Calculați puterea medie.
4. Scrieți matricea de autocorelație pentru semnalul, $x(n) = A\cos(n\omega + \varphi)$, unde φ este o variabilă aleatoare uniform distribuită între –π și π.
5. Scrieți matricea de autocorelație pentru o sinusoidă complexă însumată cu zgomot alb, cu puterea medie σ^2, $\quad x(n) = Ae^{jn\omega} + v(n)$. Calculați puterea medie a semnalului $x(n)$.
6. Calculați matricea de autocorelație pentru un proces autoregresiv definit prin $x(n) = \alpha x(n-1) + w(n), \ |\alpha| < 1,$ unde $w(n)$ este un zgomot alb cu puterea medie σ_w^2.
7. Un proces aleatoriu $x(n)$este aplicat unui filtru FIR, având drept coeficienți elementele vectorului coloană $\boldsymbol{h}$, de lungime N . Demonstrați că varianța semnalului de la ieșirea filtrului este dată de $\sigma_y^2 = \boldsymbol{h}^H\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}$, unde $\boldsymbol{R}$ este matricea de autocorelație NxN a semnalului de la intrare.
8. Fie sistemul:



Pentru filtrul din figură, presupunem că secvenţele $x(n)$ şi $d(n)$ sunt reale şi $r_{xx}(0) = 1$, $r_{xx}(1) = 0,5$, $\sigma_d^2 = 4$, $r_{dx}(0) = -1$, $r_{dx}(1) = 1$.

a) Determinaţi ecuaţia suprafeţei J, coeficientul w_1 optim şi $J_{\min}$, dacă “S” este deschis.
b) Determinaţi ecuaţia suprafeţei J, coeficientul w_1 optim şi $J_{\min}$, dacă “S” este închis.

9. Demonstraţi că funcţia cost $J(w)$ mai poate fi exprimată şi sub forma:

$$J(w) = J_{\min} + (\mathbf{w} - \mathbf{w_0})^H \mathbf{R}(\mathbf{w} - \mathbf{w_0}) = J_{\min} + \mathbf{v}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}$$

unde $J_{\min}$ este eroarea medie pătratică pentru filtrul optim, $\mathbf{w_0}$ sunt coeficienţii filtrului optim şi $\mathbf{v} = \mathbf{Q}^H(\mathbf{w} - \mathbf{w_0})$.

10. Demonstraţi că eroarea medie pătratică $J_{\min}$, în cazul filtrului optim, poate fi evaluată cu relaţia:

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k} \left| \mathbf{q_k}^H \mathbf{p} \right|^2$$

unde λ_k, cu $k = 1, \ldots, N$, sunt valorile proprii ale matricei $\mathbf{R}$, iar $\mathbf{q_k}$ sunt vectorii proprii asociaţi.

11. Demonstraţi că:

$$J = J_{\min} + \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \left| v_k \right|^2$$

unde v_k sunt elementele vectorului $\mathbf{v}$ de la problema 9.

12. Fie $\mathbf{A}$ matricea de autocorelaţie a vectorului de dimensiune $(N+1)\times 1$: $\begin{bmatrix} d(n) \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}$. Arătaţi că filtrul optim satisface relaţia:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

13. Fie un proces staţionar cu valoare medie nulă, $x(n)$, caracterizat prin matricea de autocorelaţie de ordinul 2: $\begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ şi un răspuns dorit $d(n)$ aşa încât $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}^T$ şi $\sigma_d^2 = 2$. Evaluaţi coeficienţii unui filtru optim şi eroarea medie pătratică respectivă. Reprezentaţi grafic funcția cost, în funcție de coeficienții filtrului.

14. Fie un proces staţionar cu valoare medie nulă, $x(n)$, caracterizat prin matricea de autocorelaţie de ordinul 3: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ şi un răspuns dorit $d(n)$ aşa încât $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,125 \end{bmatrix}^T$ şi $\sigma_d^2 = 2$. Evaluaţi coeficienţii unui filtru optim şi eroarea medie pătratică respectivă.

15. Modelul regresiei liniare. La intrarea unui sistem necunoscut aplicăm un semnal aleator $x(n)$ şi măsurăm ieşirea, $d(n)$,

$$d(n) = \boldsymbol{a}^H \boldsymbol{x}(n) + v(n)$$

unde $v(n)$ reprezintă zgomotul (eroarea) de măsură, iar $\boldsymbol{a}$ este un vector coloană cu M componente. Pentru a găsi acest vector, utilizăm un filtru optimal, de lungime N, având ca intrare $x(n)$ şi ca semnal dorit $d(n)$. Evaluaţi funcţia cost pentru coeficienţii optimi şi aceşti coeficienţi în cazurile $N > M$ (supramodelare), $N = M$(modelare optimă), $N < M$(submodelare). Comentaţi rezultatele.

16. Aplicaţi metoda descrisă în problema 15 pentru cazul când matricea de autocorelaţie a datelor de la intrare este

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,5 & 0,1 & -0,05 \\ 0,5 & 1,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 1,1 & 0,5 \\ -0,05 & 0,1 & 0,5 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Vectorul corelaţiilor între datele de intrare şi semnalul dorit este

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0,5272 & -0,4458 & -0,1003 & -0,0126 \end{bmatrix}^T, \; \sigma_d^2 = 0,9486, \; \sigma_v^2 = 0,1066$$

Calculaţi vectorul $\boldsymbol{a}$**,** pentru lungimea M=3. Reluaţi calculul pentru N=1,2,3,4 evaluând de fiecare dată funcţia cost minimizată. Reprezentaţi grafic această funcţie, în funcţie de coeficienţi, pentru N=1 şi N=2.

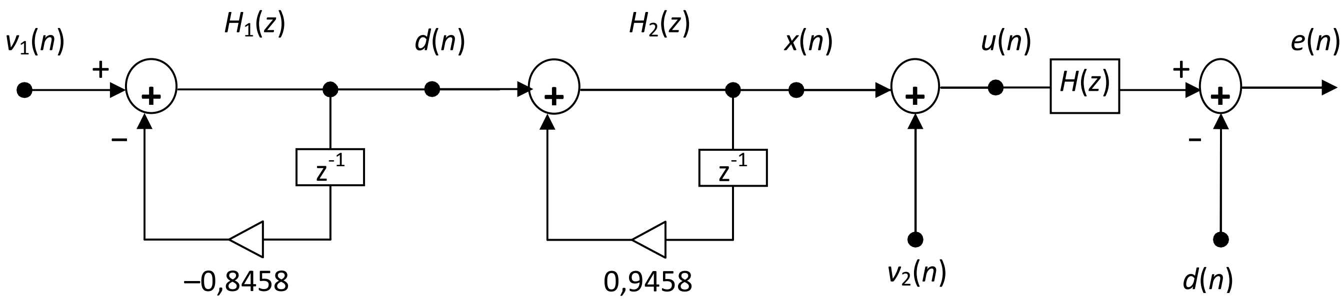
17. Un proces staţionar, $x(n)$, cu valoarea medie nulă, are $r_{xx}(n) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|n|}$. Semnalul dorit este caracterizat prin faptul că: $r_{xd}(n) = a e^{-\beta|n|}$, pentru $0 \le \beta \le \alpha$ şi $a^2 \le \sigma_d^2$, cu $a \ge 0$. Determinaţi $J_{\min}$ şi coeficienţii optimi pentru filtrul cu $N = 2$. Discuţie în funcţie de α, β şi a.

18. Pentru semnalele de la problema 17, cu $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$, $\sigma_d^2 = 1$ şi $a^2 = 0,64$, determinaţi filtrul optim şi $J_{\min}$, pentru $N = 5$ şi $N = 10$. Remarcaţi efectul creşterii ordinului. (MATLAB)

19. Să se sintetizeze un filtru RFI, $H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^* z^{-i}$, care să îndeplinească următoarele condiţii:

- să aibă câştig impus la o frecvenţă dată $H(e^{j\omega_0}) = g$;
- filtrul minimizează valoarea medie pătratică a semnalului la ieşire, pentru un semnal de intrare definit prin matricea de autocorelaţie.

20. Fie sistemul din figură:



Semnalul dorit este generat prin filtrarea cu filtrul $H_1(z)$ a unui zgomot alb, $v_1(n)$, cu valoarea medie nulă şi varianţa $\sigma_1^2 = 0,27$. Acest semnal este transmis printr-un sistem de comunicaţii, modelat prin filtrul $H_2(z)$ şi însumat cu un zgomot alb, cu valoare medie nulă şi varianţă $\sigma_2^2 = 0,1$. $v_1(n)$ şi $v_2(n)$ sunt necorelate. Se cere să se sintetizeze filtrul Wiener optimal de ordinul 1, $H(z)$, şi să se determine eroarea medie pătratică minimă. Semnalele sunt presupuse reale.

21. Aplicați metoda descrisă în problema 14 pentru cazul când matricea de autocorelație a datelor de la intrare este

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,5 & 0,1 & -0,1 \\ 0,5 & 1,1 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,5 & 1,1 & 0,5 \\ -0,1 & 0,1 & 0,5 & 1,1 \end{bmatrix}$$

Vectorul corelațiilor între datele de intrare și semnalul dorit este

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,4 & -0,2 & -0,1 \end{bmatrix}^T, \ \sigma_d^2 = 1, \ \sigma_v^2 = 0,1$$

Calculați pentru N=0, 1,2,3,4 eroarea medie pătratică. Reprezentați grafic în funcție N.

22. Un filtru optimal de lungime *N* are ca semnal de intrare $u(n)$ și ca semnal dorit $d(n) = \boldsymbol{h}^H\boldsymbol{u}(n) + v(n)$, unde $u(n)$ și $v(n)$ sunt procese aleatoare staționare în sens larg independente, iar $\boldsymbol{h}$ este un vector constant cu *P* elemente. Deduceți funcția de pondere a filtrului, ieșirea acestuia, semnalul eroare și funcția cost pentru coeficienții optimi, pentru *N=P*, *N>P, N<P*.

23. Unui filtru optimal de lungime *N* are ca semnal de intrare $x(n-M)$ și ca semnal dorit $x(n)$, unde $x(n)$ este un proces aleator staționar în sens larg. Scrieți ecuațiile Wiener-Hopf, deduceți expresiile coeficienților optimi și funcția cost. Care ar fi lungimea optimă a filtrului, dacă $x(n)$ are o durată maximă a autocorelației de *P* eșantioane?

24. Se cunosc un semnal aleator staționar în sens larg, $x(n)$, și un semnal rezultat din acesta printr-o întârziere, suprapus peste un zgomot alb, necorelat cu semnalul. Propuneți o

schemă bazată pe un filtru optimal pentru estimarea întârzierii. Analizați matematic funcționarea.

25. Un zgomot alb $x(n)$cu puterea medie σ^2 se aplică la intrarea unui filtru cu funcția de transfer $H(z) = 1 + z^{-1}$. Fie $y(n)$ ieșirea sistemului. Calculați funcțiile $r_{yx}(n)$, $r_{xy}(n), r_{yy}(n)$, densitatea spectrală de putere și puterea medie a semnalului de ieșire.
26. Un zgomot alb $x(n)$cu puterea medie σ^2 se aplică la intrarea unui filtru cu funcția de transfer $H(z) = 1 - z^{-1}$. Fie $y(n)$ ieșirea sistemului. Calculați funcțiile $r_{yx}(n)$, $r_{xy}(n), r_{yy}(n)$, densitatea spectrală de putere și puterea medie a semnalului de ieșire.
27. Un zgomot alb $x(n)$cu puterea medie σ^2 se aplică la intrarea unui filtru cauzal și stabil, cu funcția de transfer $H(z) = \frac{1}{1+\alpha z^{-1}}$. Fie $y(n)$ ieșirea sistemului. Calculați funcțiile $r_{yx}(n)$, $r_{xy}(n), r_{yy}(n)$, densitatea spectrală de putere și puterea medie a semnalului de ieșire.
28. Un zgomot alb $x(n)$cu puterea medie σ^2 se aplică la intrarea unui filtru cauzal și stabil, cu funcția de transfer $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$. Fie $y(n)$ ieșirea sistemului. Calculați funcțiile $r_{yx}(n)$, $r_{xy}(n), r_{yy}(n)$, densitatea spectrală de putere și puterea medie a semnalului de ieșire.
29. Un semnal $x(n) = a + w(n)$ unde $w(n)$ este zgomot alb cu puterea medie σ^2 și valoare medie nulă, se aplică la intrarea unui filtru cauzal și stabil, cu funcția de transfer $H(z) = \frac{1}{1+\alpha z^{-1}}$. Calculați puterea medie a semnalului de ieșire.
30. Un semnal $x(n) = a + w(n)$ unde $w(n)$ este zgomot alb cu puterea medie σ^2 și valoare medie nulă, se aplică la intrarea unui filtru cauzal și stabil, cu funcția de transfer $H(z) = \frac{1}{1+\alpha z^{-1}}$. Calculați puterea medie a semnalului de ieșire.
31. Un semnal $x(n) = a + w(n)$ unde $w(n)$ este zgomot alb cu puterea medie σ^2 și valoare medie nulă, se aplică la intrarea unui filtru cauzal și stabil, cu funcția de transfer $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$. Calculați puterea medie a semnalului de ieșire.
32. Un semnal staționar în sens larg cu densitatea spectrală de putere $P_{xx}(e^{j\omega})$ se aplică unui filtru cauzal și stabil, cu funcția de transfer $H(z) = \frac{\alpha - z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}, \propto \in \mathbb{R}$. Calculați densitatea spectrală de putere la ieșirea filtrului.
33. Un semnal staționar în sens larg cu puterea medie σ^2 se aplică unui filtru cauzal și stabil, cu funcția de transfer $H(z) = \frac{\alpha + z^{-1}}{1+\alpha z^{-1}}, \propto \in \mathbb{R}$. Calculați densitatea spectrală de putere și puterea la ieșirea filtrului.
34. Un proces aleatoriu discret în timp are funcția densitate spectrală de putere
$$P_{xx}(z) = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z)(1-\alpha z^{-1})},\ 0 < \alpha < 1 \text{ cu domeniul de convergență } \alpha < |z| < \alpha^{-1}.$$
Calculați funcția de autocorelație și puterea medie.

35. Un proces aleatoriu discret în timp are funcția de autocorelație $r_{xx}\left(n\right)=e^{-|n|}$ și valoare medie nulă. Calculați funcția densitate spectrală de putere în z și precizați domeniul de convergență. Reprezentați grafic în funcție de frecvență.
36. Calculați funcția densitate spectrală de putere pentru o sinusoidă complexă, $x(n) = Ae^{jn\omega}, \quad A = |A|e^{j\varphi}$, unde φ este o variabilă aleatoare.
37. Calculați funcția densitate spectrală de putere pentru semnalul, $x(n) = A\cos(n\omega + \varphi), \quad$ unde φ este o variabilă aleatoare uniform distribuită între –π și π.
38. Fie un proces aleatoriu $x(n) = ax(n-1) + bx(n-2) + w(n)$, unde $w(n)$ este zgomot alb. Acesta se aplică unui filtru, la ieșirea căruia rezultă zgomot alb. Calculați funcția de transfer a filtrului.
39. Se estimează valoarea medie a unui proces aleatoriu staționar, calculând $M\left(n\right)=k\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}x\left(i\right),\ 0<\lambda<1$. Calculați k astfel încât estimatorul să fie
    - Nedeplasat
    - Asimptotic nedeplasat.